Übung 10

1. Sei $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, so dass $h((1,2)) = (3,-1,5)$ und $h((0,1)) = (2,1,-1)$. Bestimmen Sie eine Formel für $h(x,y)$.

   ($\{(1,2),(0,1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$).

2. Finden Sie eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ so, dass $\mathrm{Im}(h) = L(\{(1,2,0,-4),(2,0,-1,-3)\})$ gilt.

3. Sei $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $h(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$.Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Im}(h)$ und $Ker(h)$.

4. Für (beliebige) Abbildungen $h : V \longrightarrow W$, $g : W \longrightarrow X$ ist die Hintereinanderausführung $g \circ h : V \longrightarrow X$ von g und h definiert durch $(g \circ h)(v) := g(h(v))$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie: Sind g und h lineare Abbildungen, dann ist auch $g \circ h$ linear.

5. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine lineare Abbildung $\pi : V \longrightarrow V$ heißt Projektion, falls $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) $V = \mathrm{Im}(\pi) + Ker(\pi)$. (siehe Bsp.2b. aus Übung 4. Für $v \in V$ gilt
   $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$.

   (b) $\mathrm{Im}(\pi) \cap Ker(\pi) = \{0\}$.