6. Arithmetik mit den dualen Zahlen

6.1 Grundlagen

Darstellung: $(x_{n-1}\, x_{n-2} \dots x_2\, x_1\, x_0)_{\text{Basis}}$ n-Tupel

$x \in \{0,1\}$ dual

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot B^i$$

Implementiert:
- ganze Zahlen
- Festkommazahlen
- Gleitkommazahlen

6.2 Darstellung negativer Zahlen

2 Möglichkeiten:
- Vorzeichenbit — $\boxed{0}\,110 \mathrel{\hat{=}} +6$, $\boxed{1}\,110 \mathrel{\hat{=}} -6$
- Komplement

Komplement: $+X \to X$ $\qquad (-X) = \bar{X} + 1$ ← Bit-Komplement

$-X \to R - X$

$$-(-X) = -(R-X) \Rightarrow R-(R-X) = X$$

Bestimmung d. Komplements:

Bedingung: einfach

X :		x_{n-1}	x_{n-2} ...	x_2	x_1	x_0
$\bar{X}$:		$\bar{x}_{n-1}$	$\bar{x}_{n-2}$ ..	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_0$
		1	1	1	1	1
	+					1
$2^n \to$	1	0	0	0	0	0

$$X + \bar{X} + 1 = 2^n = R$$

$$-X = R - X$$

$$\boxed{\bar{X} + 1 = R - X}$$

← 2^e-Komplement

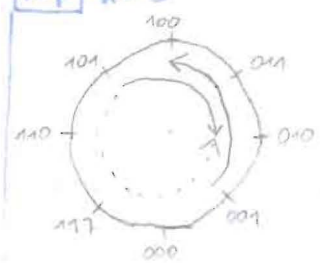
Sub: $X_2 - X_1 = X_2 + (-X_1) = X_2 + (R - X_1)$

$X_2 \geq X_1$: $\quad = R + (X_2 - X_1)$ kann wegfallen bzw. irrelevant sein

$X_2 < X_1$: $\quad = R - (X_1 - X_2)$

Addition erfolgt MODULO 2^n

Bsp $n = 3$ $\qquad R = 2^3$



$X_1 = 1$, $X_2 = 3$ $\quad X_1 + X_2 = 3$ $\qquad R - X$, $8 - 3$

$X_1 = 5$, $X_2 = 3$ $\quad X_1 - X_2 = 2$

$\boxed{\text{Bsp}}$

5	0101
−3	1101
2	10010

Zer Komplement d. 3: 0011 x, 1100 $\bar{x}$, 1101 $\bar{x}+1$ } −3

−5	1011
2	0010
−3	01101

Überlauf:

−4	1100	4	0100
−5	1011	5	0101
−9	10111	9	01001

−4	1100
−2	1110
−6	11010

6.3 Multiplikation

mehrfache Addition $3 \cdot 2 = 2+2+2$

$3 \cdot 100 = 3 + \ldots + 3$

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 21 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 252 \end{array}$$ } Addieren & Verschieben

$$\begin{array}{r} 1011 \cdot 101 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ 1011 \\ \hline 110111 \end{array}$$

rekursive Methode: $P = A \cdot X$ $\quad X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$

$$P_n = (P_{n-1} + x_{n-1} \cdot A) \cdot 2^{-1}$$

$\boxed{\text{Bsp}}$

$$P_1 = (\overset{=0}{P_0} + x_0 \cdot A) \cdot 2^{-1}$$

$$P_2 = (P_1 + x_1 \cdot A) \cdot 2^{-1} = ((P_0 + x_0 \cdot A) \cdot 2^{-1} + x_1 \cdot A) \cdot 2^{-1}$$

$$P_3 = (P_2 + x_2 \cdot A) \cdot 2^{-1} = (((P_0 + x_0 \cdot A) \cdot 2^{-1} + x_1 \cdot A) \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot A) \cdot 2^{-1} =$$

$$= ((P_0 \cdot 2^{-1} + x_0 \cdot A \cdot 2^{-1}) + x_1 \cdot A) \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot A) \cdot 2^{-1} =$$

$$= (P_0 \cdot 2^{-2} + x_0 \cdot A \cdot 2^{-2} + x_1 \cdot A \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot A) \cdot 2^{-1} =$$

$$= \cancel{P_0 \cdot 2^{-3}} + x_0 \cdot A \cdot 2^{-3} + x_1 \cdot A \cdot 2^{-2} + x_2 \cdot A \cdot 2^{-1}$$

$$P_n = x_0 \cdot A \cdot 2^{-n} + x_1 \cdot A \cdot 2^{-n+1} + x_2 \cdot A \cdot 2^{-n+2} + \ldots + x_{n-1} \cdot A \cdot 2^{-1} =$$

$$= A \cdot x_0 \cdot 2^{-n} + A \cdot x_1 \cdot 2^{-(n-1)} + A \cdot x_2 \cdot 2^{-(n-2)} + \ldots + A \cdot x_{n-1} \cdot 2^{-1} =$$

$$= A \cdot 2^{-n} \underbrace{(x_0 + x_1 \cdot 2^1 + x_2 \cdot 2^2 + \ldots + x_{n-1} \cdot 2^n)}_{X} =$$

$$P_N = \boxed{2^{-n} \cdot A \cdot X}$$

$$P = X \cdot A = P_N \cdot 2^n$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $P = A \cdot X = 5 \cdot 3$ $\quad A = 0101$ $\quad X = 0011$ $\quad -5 = 1011$ • $3 = 0011$

P_0	0000
$+x_0=1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	0101
P_1	00101
$+x_1=1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	01111
P_2	001111

P_2	001111
$+x_2=0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	001111
P_3	0001111
$+x_3=0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	0001111
P_4	00001111 = 15

P_0	0000
$+x_0=1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	1011
P_1	01011
$+x_1=1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	10001
P_2	110001

P_2	110001
$+x_2=0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	110001
P_3	1110001
$+x_3=0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	1110001
P_4	11110001

Bsp $A = 0101$ (5) $X = 1101$ (−3)

P_0	0000
$+x_0 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	0101
P_1	00101
$+x_1 \cdot 0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	00101
P_2	000101
$+x_2 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	011001
P_3	0011001
$+x_3 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	10000001
P_4	01000001

Bsp $A = 1011$ (−5) $X = 1101$ (−3)

P_0	0000
$+x_0 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	1011
P_1	11011
$+x_1 \cdot 0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	11011
P_2	111011
$+x_2 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	1001111
P_3	1100111
$+x_3 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	01111111
P_4	00111111

Korrektur: $X + X_{komplement} = 2^n$

2er Komplement: $2^{n-1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} x_i \cdot 2^i}_{\tilde{X}}$ bei negativen Zahl

$$X + 2^{n-1} + \tilde{X} = 2^n$$

$$X + \tilde{X} = 2^{n-1}$$

$$A \cdot \tilde{X} = A(2^{n-1} - X)$$

$$A \cdot \tilde{X} = A \cdot 2^{n-1} - \underbrace{A \cdot X}_{P}$$

$$\underline{\underline{P = A \cdot \tilde{X} - A \cdot 2^{n-1}}}$$

Bsp $A = 0101$ (5) $X = 1101$ (−3)

P_0	0000
$+x_0 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	0101
P_1	00101
$+x_1 \cdot 0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	00101
P_2	000101
$+x_2 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	0011001
P_3	0011001
$-x_3 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	11110001
P_4	11110001

Bsp $A = 1011$ (−5) $X = 1101$ (−3)

P_0	0000
$+x_0 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	1011
P_1	11011
$+x_1 \cdot 0$	0000
$\cdot 2^{-1}$	11011
P_2	111011
$+x_2 \cdot 1$	1011
$\cdot 2^{-1}$	1001111
P_3	1100111
$-x_3 \cdot 1$	0101
$\cdot 2^{-1}$	00011111
P_4	00001111

6.4 Division

$X : D = Q$ Rest R

$X = Q \cdot D + R$

z.B.: $32 : 5 = 6$ $\quad 32 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5$

$R = 2$ $\quad R = 2$

$$r_m = 2 \cdot r_{m-1} - q_m \cdot D \quad \rightarrow \quad q_m = \begin{cases} 1 & r \geq D \\ 0 & r \leq D \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r_m &= 2\left(2 \cdot r_{m-2} - q_{m-1} \cdot D\right) - q_m \cdot D = \\ &= 2\left(2\left(2 r_{m-3} - q_{m-2} \cdot D\right) - q_{m-1} \cdot D\right) - q_m \cdot D = \dots \\ &= 2^3 \cdot r_{m-3} - 2^2 \cdot q_{m-2} \cdot D - 2 \cdot q_{m-1} \cdot D - q_m \cdot D = \\ &= 2^m \cdot r_0 - D\underbrace{\left(2^{m-1} \cdot q_1 + 2^{m-2} \cdot q_2 + \dots + 2^0 \cdot q_m\right)}_{Q} \\ &= 2^m \cdot X - D \cdot Q \end{aligned}$$

$$R = X - Q \cdot D \quad \rightarrow \quad r_m = 2^m \cdot X - Q \cdot D$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ $32 : 6 = 5 \quad R = 2$

	$:01000000 : 0110 = \underbrace{101}_{5}$
$\cdot 2$	$0:10000000$
$-D$	$1:1010$
Σ	00010000
$\cdot 2$	00100000
$\cdot 2$	01000000
$-D$	11010
R	$00010:000 = 2$

6.5 Gleitkommazahlen

6.5.1 Einführung

Bisher: Rationale Zahlen $\quad X = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot B^k}_{\text{Vorkomma}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{m} x_{-\ell} \cdot B^{-\ell}}_{\text{Nachkomma}}$

technisch/einsetzbarkeit:

$h = 0{,}\underbrace{000000 \dots 00}_{34}622\ fs \quad \rightarrow \quad h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ fs$

$$\boxed{X = M \cdot B^e}$$

Hardware: M & e $\rightarrow$ fixe Stellenzahl

Mantisse, Exponent zur Basis B

z.B. IEEE 754 Single (float) $\quad$ [VZ | Mantisse | Exp.] 32
1 23 8

Double (double) $\quad$ [VZ | Mantisse | Exp.] 64
1 52 11

Fließkomma: $\left(m_{-1} \cdot B^{-1} + m_{-2} \cdot B^{-2} + \dots + m_{-p} \cdot B^{-p}\right) \cdot B^{e}$

p ... Precision (Genauigkeit)

CPU: $B=2$

e ... Exponent

z.B.: $B=10$ $x=1{,}2$ $p=4$ $-2 \leq e \leq 3$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}1200 \cdot 10^{1} \\ 0{,}0120 \cdot 10^{2} \\ 0{,}0012 \cdot 10^{3} \end{array}\right\} \text{mehrdeutig}$$

$\Rightarrow$ Normalisierung: 1. Nachkommazahl $\neq 0$

d.h.: $\frac{1}{2} \leq M < 1$

$x=0$: Sonderfall

z.B.: $B=2$ $p=3$ $-1 \leq e \leq 2$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}100 \cdot 2^{e} \\ 0{,}101 \cdot 2^{e} \\ 0{,}110 \cdot 2^{e} \\ 0{,}111 \cdot 2^{e} \end{array}\right\} \text{16 Zahlen}$$

Abstand zw. 2 Zahlen: 2^{e-p}

6.5.2 Runden von Gleitkommazahlen

nur best. Zahlen sind am Raster.

X ... genauer Wert $\quad X^{*}$ ... Rasterwert, möglichst darstellbarer Wert im Gleitkommaformat

$$X = X^{*} + \text{Rest} = M \cdot B^{e} + \lambda \cdot B^{e-p}$$

$0 \leq \lambda < 1$

reelle Zahl $\hat{=}$ unendlicher Dezimalbruch $\quad X = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k \cdot B^{k}}_{\text{Vorkommateil}} + \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} x_k \cdot B^{k}}_{\text{Nachkommateil}}$

Genauigkeit $\quad$ ganzzahlig: $k \leq 0$ $\xleftarrow{\text{d.h.}}$ $X = \sum_{i=k}^{\infty} x_{-i} \cdot B^{-i}$

$$X = \sum_{i=k}^{k+p-1} x_{-i} \cdot B^{-i} + \sum_{i=k+p}^{\infty} x_{-i} \cdot B^{-i} =$$

$$= B^{-k+1} \underbrace{\sum_{i=k}^{k+p-1} x_{-i} B^{-i+k-1}}_{k-1-i<0 \Rightarrow <1} + B^{-k+p+1} \cdot \underbrace{\sum_{i=k+p}^{\infty} x_{-i} \cdot B^{-i+k+p-1}}_{i+k+p-1<0 \Rightarrow <1}$$

$\Rightarrow <1$

z.B.: $B=2$ $p=4$ $e=6$ $\quad \underbrace{1010}\,\underbrace{10}{,}\,\underbrace{101}$

$$0{,}1010 \cdot 2^{6} + 0{,}1010 \cdot 2^{2}$$

Runden ⇒ Abschneiden
→ zum nächstliegenden Gitterpunkt
→ Auf bzw. Abrunden

Beispiele zur Syntax

Bsp. verbale Formulierung:

Satz = Subjekt Prädikat

⇒ Er geht.; Er lernt.; Sie geht.; Sie lernt.

Subjekt → "Er", "Sie"

Prädikat → "geht", "lernt"

Bsp. $S = A\,B$ $\quad A = \text{"a"} \mid \text{"b"}$ $\quad B = \text{"c"} \mid \text{"d"}$

$L = \{ac, ad, bc, bd\}$

Bsp. rekursive Grammatik

$S = A$ $\quad A = \text{"b"}\,A \mid \phi$ (Leerzeichen) $\Rightarrow L = \{\phi, b, bb, bbb, \dots\}$

Bsp. $S = A$ $\quad A = \text{"a"}\,A\,\text{"c"} \mid \text{"b"}$ $\Rightarrow L = \{b, abc, aabcc, \dots\}$

Bsp. $A = Z \mid A\,\text{"+"}\,A$ $\quad Z = \text{"1"}, \text{"2"}, \text{"3"}, \text{"4"}$